



Università degli studi di
Padova



IL CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI

Corso di Acustica applicata

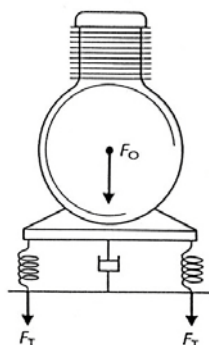
Renato Lazzarin

Dipartimento di Tecnica e Gestione dei
Sistemi industriali

L'isolamento dalle vibrazioni è finalizzato a ridurre la trasmissione di moti o forze vibranti da una struttura ad un'altra.

Si possono avere due tipi di intervento:

1) si cerca di prevenire la trasmissione di forze vibranti da una macchina al suo basamento;



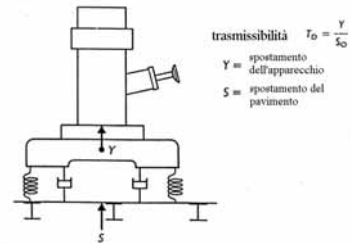
trasmissibilità $T_f = \frac{F_T}{F_O}$

F_T = forza trasmessa

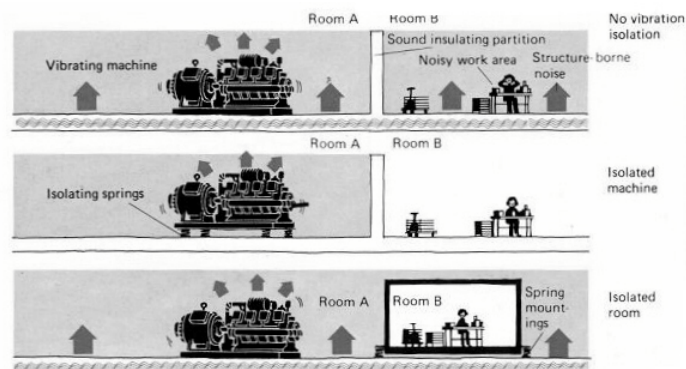
F_O = forza sollecitante

Compressore posto su supporti isolanti

2) si cerca di ridurre la trasmissione del moto da un basamento ad una macchina montata su di esso.



Microscopio elettronico su supporti isolanti



Si definiscono due indici: la trasmissibilità per la forza definita come il rapporto fra la forza trasmessa attraverso il sistema di isolamento e quella applicata;

la trasmissibilità per lo spostamento, rapporto fra l'ampiezza trasmessa e quella applicata.

Inizialmente si può assumere l'ipotesi semplificativa di sistemi ad un solo grado di libertà.

Si consideri un sistema di massa m montato su di una molla la cui rigidità sia k [N/m] (la molla esercita una forza di k N se spostata di 1 m). Un bilancio delle forze sul sistema in assenza di altre azioni è:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{da cui:} \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Si tratta di un'equazione differenziale nella forma:

$$z^2 = -\frac{k}{m}$$

Essa presenta due soluzioni immaginarie: $z = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

E' come dire che lo spostamento è una $x(t)$ tale che differenziata due volte dà luogo alla stessa funzione moltiplicata per una costante negativa: si tratta di una nota proprietà delle funzioni sinusoidali.

La soluzione generale è data da:

$$x = C_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

La soluzione generale si particularizza in funzione delle condizioni al contorno. A parte la condizione di quiete poco significativa, si può spostare la massa dalla sua condizione di equilibrio, lasciandola poi liberamente oscillare.

Quanto espresso è descritto dalle seguenti condizioni al contorno:

$$x = x_o \quad \text{e} \quad \dot{x} = 0 \quad \text{per} \quad t = 0$$

La soluzione particolare è allora la seguente:

$$x = x_o \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$ viene indicata come la velocità angolare naturale ω_n [s⁻¹]

In conclusione si ha che lo spostamento x è dato da:

$$x = x_o \cos \omega_n t \quad \text{con frequenza naturale:} \quad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

e periodo $T = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n}$

Si ha così una vibrazione sinusoidale non smorzata con la frequenza naturale del sistema. La frequenza naturale si può collegare facilmente con la deformazione statica δ_{st} . Infatti:

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} \quad \text{La frequenza naturale è data da:}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} \approx 0,5 \sqrt{\frac{1}{\delta_{st}}} \text{ Hz}$$

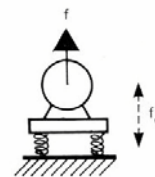
La deformazione statica va espressa in m.

Si abbia ora una forza periodica $P_o \cos \omega t$ che agisce sul sistema, dovuta ad esempio ad un moto rotativo sbilanciato di frequenza

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

L'equilibrio dinamico è dato dalla seguente equazione:

$$m\ddot{x} + kx = P_o \cos \omega t$$



Si provi a controllare se l'equazione è soddisfatta dalla funzione:

$$x = x_o \cos \omega t$$

$$-m \omega^2 x_o \cos \omega t + k x_o \cos \omega t = P_o \cos \omega t$$

cioè:

$$x_o (k - m \omega^2) = P_o \quad \text{da cui:}$$

$$x_o = \frac{P_o}{k - m \omega^2} = \frac{\frac{P_o}{k}}{1 - \frac{m \omega^2}{k}} = \frac{\frac{P_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Una soluzione è data da:

$$x = \frac{\frac{P_o}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \cos \omega t$$

Dal momento che l'espressione al numeratore è la deformazione statica della molla sotto carico costante P_o :

Si ha infine la seguente espressione: $x_{st} = \frac{P_o}{k}$

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{\cos \omega t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

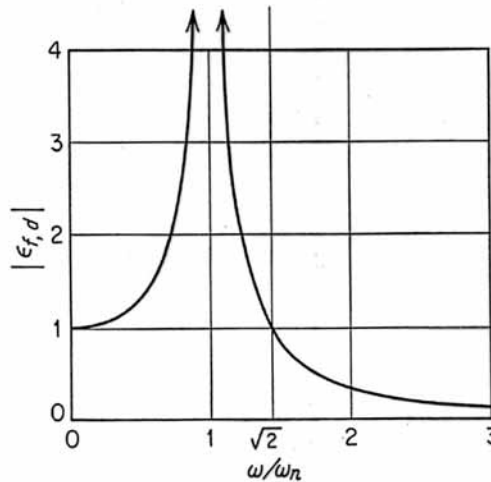
La forza trasmessa alle fondazioni è data da kx , per cui il rapporto fra tale forza e la forza sollecitante ε_t è dato da:

$$\varepsilon_t = \left| \frac{kx}{P_o \cos \omega t} \right| = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right|$$

Uguale espressione vale per il rapporto fra spostamento x e deflessione statica x_{st} :

Per piccola o nessuna frequenza sollecitante lo spostamento è dato solo dalla deflessione statica dovuta alla forza sollecitante P_o (aggiuntiva rispetto a quella dovuta alla massa).

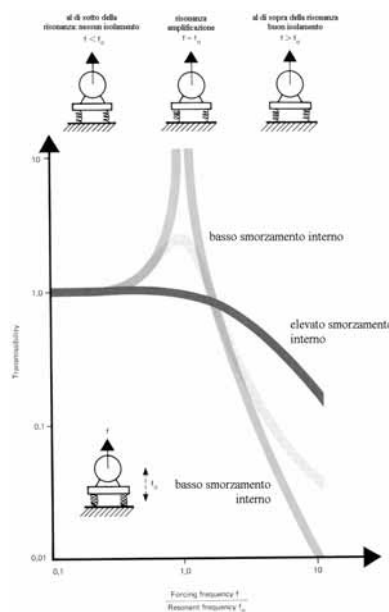
All'aumentare della frequenza sollecitante aumentano sia spostamento che trasmissibilità, ben al di là del valore unitario, peggiorando la situazione.



Direzione della forza sollecitante e movimento della massa sono di segno concorde finché $\omega < \omega_n$ (la massa si trova al di sotto della posizione di equilibrio, quando la forza spinge verso il basso). Vi è completa coincidenza quando $\omega = \omega_n$ (la forza spinge la massa proprio quando questa è sollecitata dalla molla).

Per $\omega > \omega_n$ vi è discordanza fra direzione della forza e movimento della massa (la massa si trova al di sopra della posizione di equilibrio quando la forza spinge verso il basso).

Per frequenze molto alte ($\omega \gg \omega_n$) la forza si muove così rapidamente che la massa non ha tempo per seguirla, dimodoché l'ampiezza è molto ridotta.



E' ovvio che vanno evitate accuratamente tutte le condizioni in cui $\omega < \omega_n$, ma anche tutte quelle con $\omega > \omega_n$ ed $\varepsilon_r > 1$, peggiorative rispetto alla situazione priva di isolamento. La condizione di indifferenza si ha per:

$$\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| = 1$$

che implica:

$$\omega = \sqrt{2} \omega_n$$

Un sistema di isolamento comincia a dare risultati per:

$$\omega > 1,4 \omega_n \text{ ovvero per } f > 1,4 f_n$$

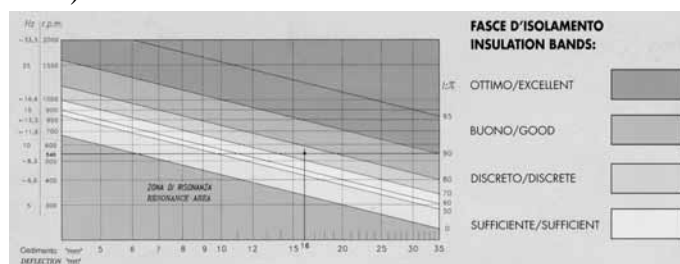
E' importante la seguente tabella:

per $\omega/\omega_n > 10$ ($\varepsilon=0,01$) l'isolamento è considerato elevato

da 6 a 10 è considerato buono (ε è almeno 0,03)

da 3 a 6 è considerato basso (ε è almeno 0,1)

sotto 3 è considerato scadente (sotto 1,4 si ha addirittura un'amplificazione!).



La vibrazione libera non esiste in natura. Tutte le vibrazioni sono soggette ad uno smorzamento più o meno grande.

Tale smorzamento si può rappresentare come una forza proporzionale alla velocità dell'oscillazione.

Indicando con c [Ns/m] lo smorzamento viscoso:

$c\dot{x}$

Lo smorzamento è presente sia negli stessi elementi isolanti (assai più nei supporti in gomma che nelle molle in acciaio), ma può essere prodotto artificialmente da un pistoncino che si muove in un mezzo viscoso.

L'equilibrio dinamico è dato ora da:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Se si considera la funzione $x=e^{st}$ si vede che la derivata dà la stessa funzione moltiplicata per una costante. Questa funzione sostituita nell'equazione di bilancio la trasforma in un'equazione algebrica:

$$(m s^2 + cs + k) e^{st} = 0$$

Tale equazione presenta le soluzioni:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

La soluzione generale è: $x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$

Si hanno due casi principali a seconda se le soluzioni siano reali o complesse. Si tratta di controllare se:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$$

In questo caso le soluzioni sono reali ed entrambe negative. Esse descrivono due curve esponenziali decrescenti, la cui somma assume valori diversi a seconda dei valori delle due costanti. Si vede che si tratta di un moto privo di vibrazioni che ripristina immediatamente le condizioni di equilibrio. Ciò è dovuto ad uno smorzamento molto grande. Per valori piccoli di c si arriva ad annullare il termine sotto radice con lo smorzamento cosiddetto critico.

Lo smorzamento critico è dato da:

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = 2\sqrt{mk}$$

Se lo smorzamento scende ancora si hanno le soluzioni complesse:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\frac{c}{2m} \pm jq$$

La soluzione generale diventa:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{c}{2m}t} [C_1 \{ \cos qt + j \sin qt \} + C_2 \{ \cos qt - j \sin qt \}] = \\ &= e^{-\frac{c}{2m}t} [\{ C_1 + C_2 \} \cos qt + \{ j C_1 - j C_2 \} \sin qt] \end{aligned}$$

In altri termini si ottiene:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} [C_1' \cos qt + C_2' \sin qt]$$

con:

$$q = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

La soluzione consiste di due fattori, un esponenziale decrescente ed una funzione sinusoidale. Quanto più piccolo lo smorzamento tanto meno ripida sarà la curva esponenziale e tanti più cicli saranno necessari per fermare le vibrazioni.

La velocità di riduzione dell'ampiezza si calcola facilmente, considerando ciò che accade nell'intervallo $2\pi/q$ fra due massimi.

L'ampiezza di vibrazione passa da: $e^{-\frac{c}{2m}t}$ a $e^{-\frac{c}{2m}(t+\frac{2\pi}{q})}$

E' intervenuta la riduzione di un fattore costante pari a:

La frequenza di vibrazione diminuisce all'aumentare dello smorzamento:

$$\frac{q}{\omega_n} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{m c^2}{4k m^2}} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{4mk}}$$

$$e^{-\frac{\pi c}{mq}}$$

La relazione si può rappresentare come un arco di circonferenza. Dato che per $c=0$ la tangente è orizzontale, la frequenza q è praticamente costante e pari a $\sqrt{\frac{k}{m}}$ per tutti i

valori tecnici di smorzamento, quando $\frac{c}{c_c} < 0,2$

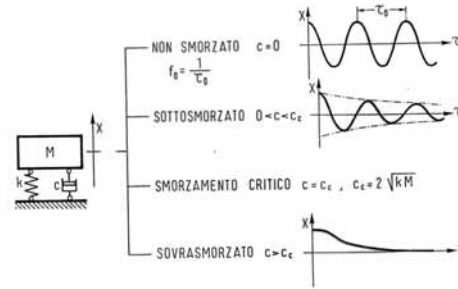


Fig. II.2-1 - Oscillazioni libere di un sistema ad un grado di libertà.

L'equazione di equilibrio dinamico in presenza di smorzamento e di forza sollecitante è data da:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_o \cos \omega t$$

Alla frequenza naturale del sistema $\sqrt{\frac{k}{m}}$ si aggiunge la frequenza naturale di smorzamento

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

e la frequenza di massima ampiezza forzata.

Queste coincidono per c molto piccolo, ma, all'aumentare dello smorzamento, il massimo non si ha più alla frequenza naturale e si ha un progressivo sfasamento fra forza e moto, molto regolare per lo smorzamento critico.

Per $\omega \gg \omega_n$ lo smorzamento può peggiorare la trasmissibilità rispetto alla situazione libera, ma se c non è molto alto il peggioramento è lievissimo e si hanno in compenso garanzie nelle vicinanze di ω_n . Si tenga conto che nei transitori di partenza e di fermata di una macchina si passa sempre per ω_n .

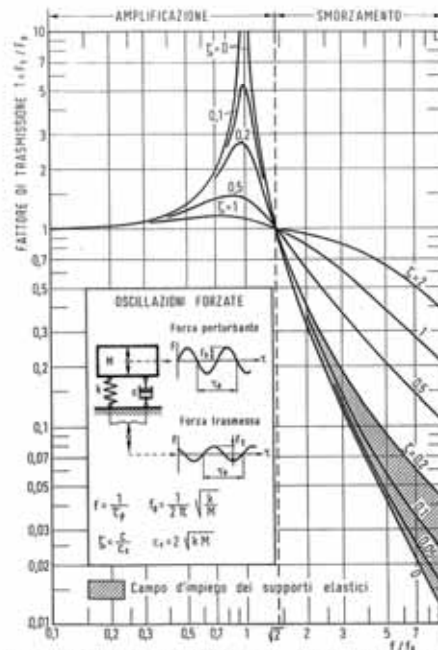
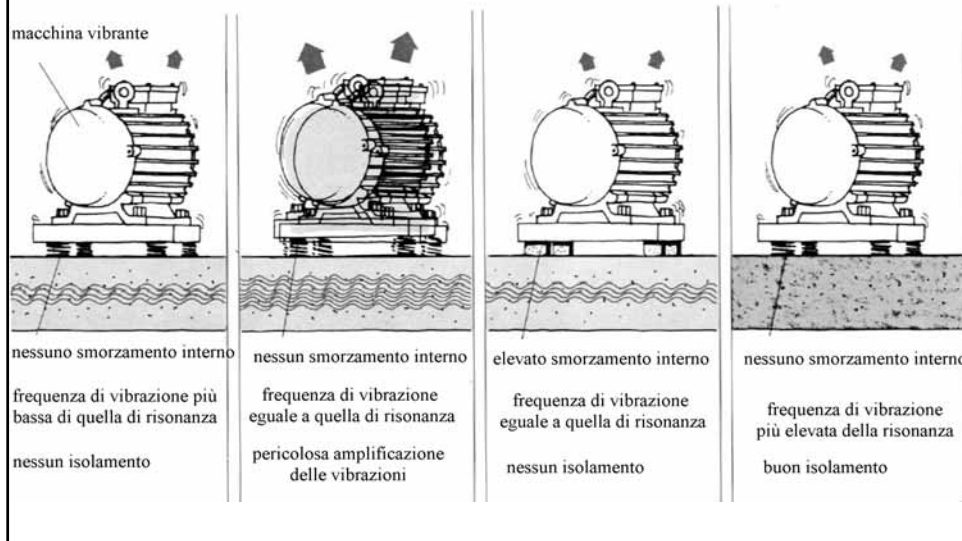


Fig. II.2-2 - Fattore di trasmissione per un sistema ad un grado di libertà in moto oscillatorio forzato.

La seguente figura è riassuntiva di alcune situazioni fin qui descritte:



Analiticamente la relazione che consente il calcolo della trasmissibilità è data da:

$$\varepsilon_t = \frac{1 + \left(2\xi \frac{f}{f_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{f}{f_n}\right)^2}} \quad \text{con } \xi = \frac{c}{c_c}$$

Anche in presenza di smorzamento vale l'esigenza di avere:

$$\frac{f}{f_n} > \sqrt{2}$$

Nella scelta dei supporti elastici si deve considerare la componente significativa di più bassa frequenza della forza disturbante: un sistema di supporto efficace per tale frequenza lo sarà a maggior ragione rispetto alle componenti di frequenza più elevata della sollecitazione.

Per quanto riguarda il coefficiente di amplificazione, esso è dato da:

$$\frac{x}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{f}{f_n}\right)^2}}$$

Esso diminuisce nella zona di impiego all'aumentare di f/f_n con scarsa influenza dello smorzamento, mentre lo smorzamento risulta fondamentale per ridurre l'amplificazione nella zona di risonanza.

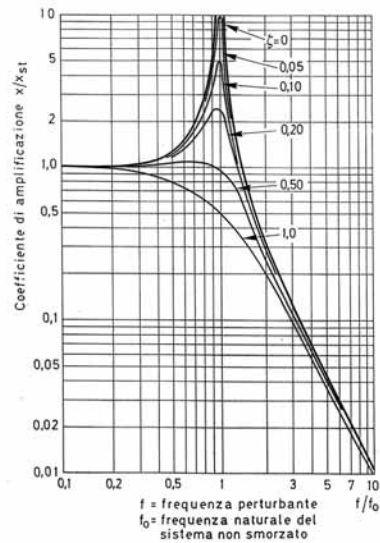
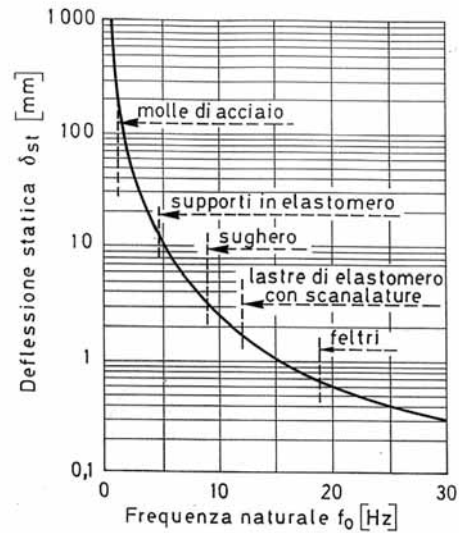
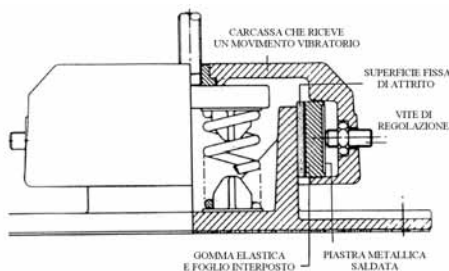


Fig. II.2-4 - Coefficiente di amplificazione per un sistema ad un grado di libertà in moto oscillatorio forzato (da [8]).

Per quanto riguarda i fattori di smorzamento si hanno i seguenti valori caratteristici:
 per molle di acciaio $\xi=0,005$
 per gomma naturale o neoprene $\xi=0,05$; per elastomeri speciali $\xi=0,10-0,15$; per supporti pneumatici $\xi=0,17$.



Esempio applicativo

Una macchina sia azionata da un motore a 1800 rpm. Il motore ed i collegamenti sono montati su di una piattaforma isolata su molle con deformazione sotto carico di 4 cm. Verificare l' idoneità dell'isolamento.

$$f = \frac{1800}{60} = 30 \text{ Hz} \quad f_n = 0,5 \sqrt{\frac{1}{4 \times 10^{-2}}} = 2,5 \text{ Hz}$$

$$\frac{f}{f_n} = \frac{30}{2,5} = 12$$

L'isolamento selezionato è idoneo.

Esempio applicativo

Una cabina di una macchina si trova su di un rivestimento in neoprene con deformazione sotto carico di 1 mm ed è sottoposta a $f=250$ Hz. Verificare l'idoneità dell'isolamento.

$$f_n = 0,5 \sqrt{\frac{1}{0,001}} = 16 \text{ Hz} \qquad \frac{f}{f_n} = \frac{250}{16} = 15,6$$

L'isolamento selezionato è idoneo.

Esempio applicativo

Un ventilatore opera a 900 rpm, cioè la frequenza da isolare è pari a $900/60=15$ Hz. Si utilizzano supporti di neoprene con $\xi=0,05$, volendo ottenere un fattore di trasmissione di 0,1. Si cerchi la deflessione statica necessaria.

Dal diagramma si ricava $f/f_n=3,4$, cioè $f_n = 15/3,4=4,4$ Hz.

La deflessione statica sotto l'azione del peso proprio del ventilatore deve essere tale che:

$$\delta_{st} = \frac{0,5^2}{f_n^2} = \frac{0,25}{4,4^2} = 0,013 \text{ m (13 mm)}$$

Si considerino ora alcune situazioni diverse.

Il punto di partenza sia una macchina della massa di 100 kg, comprendenti la massa del blocco su cui è montata, sollecitata da una forza $F=50$ kp, oscillante a 990 rpm (16,5 Hz). Si voglia ottenere $\varepsilon_t=0,1$. La condizione da imporre è allora:

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{16,5}{f_n} \right)^2} \right| = 0,1$$

Si trova $f_n=5$ Hz, il che richiede una $\delta_{st}=10$ mm :

$$\delta_{st} = \frac{0,5^2}{f_n^2} = \frac{0,5^2}{5^2} = 0,01$$

Se si utilizzano supporti elastici con $k=98.000$ N/m, si trova appunto $\delta_{st}=10$ mm.

La sollecitazione è pari a $50 \times 0,1 = 5$ kp con uno spostamento pari a $0,5$ mm, $x_{st} = 50 \times 9,8 / 98.000 = 5$ mm.

Lo stesso sistema sia montato su di un supporto elastico con k doppio: $k=98.000 \times 2 = 196.000$ N/m. Ovviamente $\delta_{st}=5$ mm e $x_{st}=2,5$ mm:

$$f_n = 0,5 \sqrt{\frac{1}{0,005}} = 7 \text{ Hz}$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{16,5}{7} \right)^2} \right| = 0,21$$

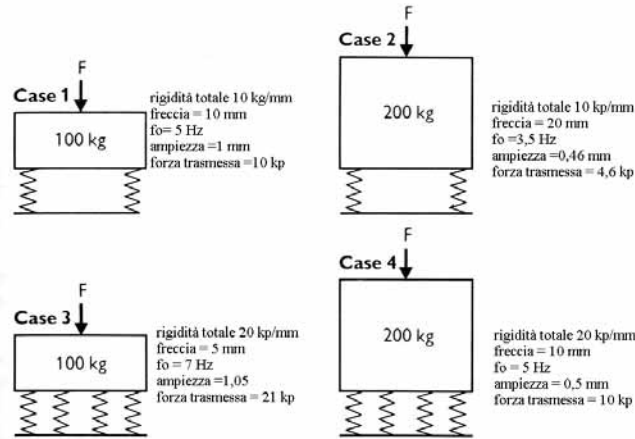
La sollecitazione è pari a $50 \times 0,21 = 10,5$ kp con uno spostamento simile a prima.

Si passi ora ad un sistema montato su un blocco per totali 200 kg con il supporto elastico del caso 1: $\delta_{st}=20$ mm, $x_{st}=5$ mm e la frequenza naturale è 3,5 Hz:

La forza trasmessa è appena $50 \times 0,047 = 2,3$ kp con uno spostamento di $5 \times 0,047 = 0,25$ mm.

$$\varepsilon_t = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{16,5}{3,5} \right)^2} \right| = 0,047$$

Se però nelle nuove condizioni di massa si ricorre al supporto elastico considerato nel punto 2 si ha ancora: $\delta_{st}=10\text{ mm}$; si ritrova una frequenza naturale di 5 Hz e la situazione è identica al caso 1.

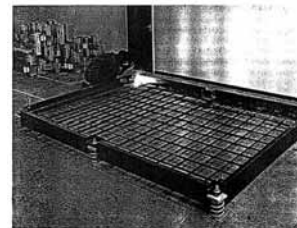
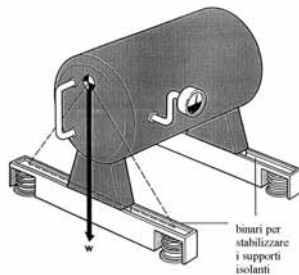


Effetti del cambiamento della massa e della rigidezza

1. La forza trasmessa dipende dalla deflessione statica, casi 1 e 3;
2. Aumentando la massa per la stessa deflessione si riduce lo spostamento ma non la forza trasmessa, casi 1 e 4;
3. Riducendo la rigidità per la stessa massa si riduce la forza trasmessa e non si aumenta lo spostamento, casi 1 e 3, casi 2 e 4.

Si può concludere sinteticamente che, data una certa rigidezza dei supporti, si può ridurre la frequenza naturale con l'aggiunta di una massa nella forma di solito di un blocco di inerzia. Infatti il ricorso a supporti più rigidi diminuisce l'ampiezza dell'oscillazione, ma aumenta la frequenza naturale. L'aumento della massa può migliorare la situazione.

La base inerziale è realizzata di solito in cemento gettato su un contenitore strutturale in acciaio con barre di rinforzo e supporti per montare il macchinario e i supporti isolanti.



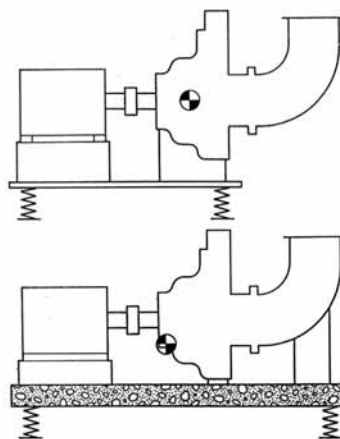
Struttura per base inerziale

Strutture per base inerziale realizzate su misura sono prefabbricate per una gettata di cemento di riempimento effettuata in loco. Vengono posizionate barre di rinforzo e i punti di collocazione delle molle vengono inseriti e viene previsto anche un gioco di 10 mm da terra con montaggi selezionati per le molle alla loro corretta altezza di lavoro

Boiler posto su traversine di distribuzione del carico per migliorare la stabilità

I supporti isolanti riducono il movimento dell'apparecchiatura e danno maggiore stabilità al sistema. Infatti il blocco di inerzia allarga le dimensioni del supporto ed abbassa il centro di gravità:

Inoltre il blocco di inerzia può riequilibrare una situazione in cui l'apparecchiatura sia molto più pesante da una parte che dall'altra. Sebbene l'uso di un blocco di inerzia non migliori la trasmissibilità data una certa freccia, si possono usare supporti isolanti più rigidi a parità di freccia, per cui l'apparecchiatura è molto meno suscettibile all'effetto di forze esterne come variazioni di pressione e momento in transitorio.

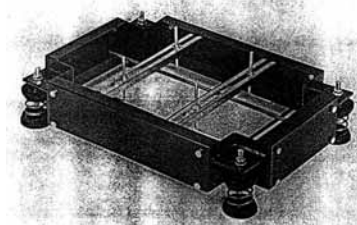


Pompa e gomito di tubazione su blocco di inerzia esteso

Un supporto di inerzia fornisce rigidità all'apparecchiatura. Riduce inoltre le problematiche dovute ai moti oscillatori.

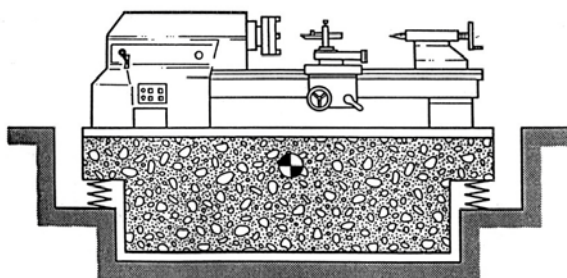
Esso rende meno problematica la stima del baricentro dell'apparecchiatura.

Infine agisce come barriera acustica locale nei confronti della zona sottostante all'apparecchiatura.



Base inerziale smontabile

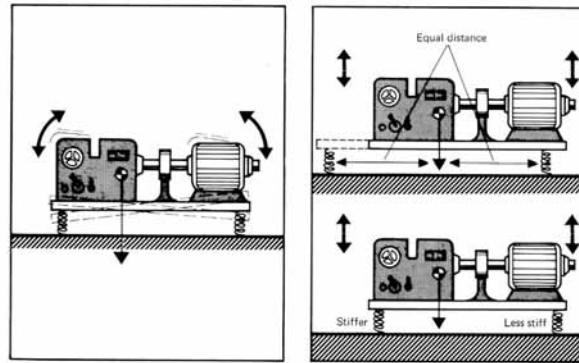
Sistema ideato da un costruttore per soddisfare la richiesta di flessibilità dimensionale in collegamento con una rapida consegna. Qui solo gli elementi d'angolo sono standard e le barre laterali sono rapide da tagliare. In fase di montaggio e dopo consolidamento, il cemento diventa parte necessaria per l'integrità strutturale



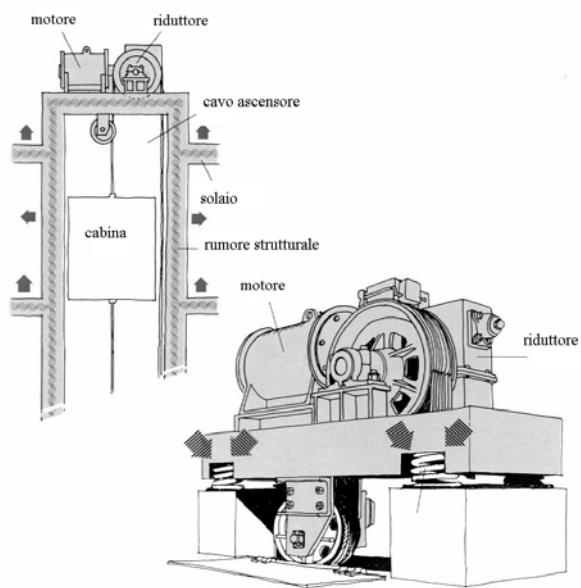
Tornio con un blocco di fondazione a T per abbassare il centro di gravità

Se una macchina non ha una distribuzione uniforme dei pesi, è necessario irrigidire i supporti più vicini al centro di gravità, o in alternativa rendere i supporti equidistanti dal centro di gravità.

Principle



Il macchinario vibrante va isolato completamente dalla struttura dell'edificio impiegando un supporto elastico. Una riduzione maggiore può essere ottenuta realizzando l'albero di sollevamento ed il motore separatamente dalla struttura del resto dell'edificio.



Supporti elastici di impiego corrente

I supporti elastici devono essere (1) abbastanza morbidi per fornire adeguato isolamento; (2) in grado di sostenere il carico imposto; (3) compatibili con l'ambiente in cui operano (temperatura, umidità, aggressività chimica).

Supporti a molla metallica

Sono usati per carichi importanti e per deflessioni statiche maggiori di 5 cm fino a 15 cm con frequenze di risonanza molto basse (1,3 Hz).

Lo smorzamento è molto modesto (0,005) per cui va evitato

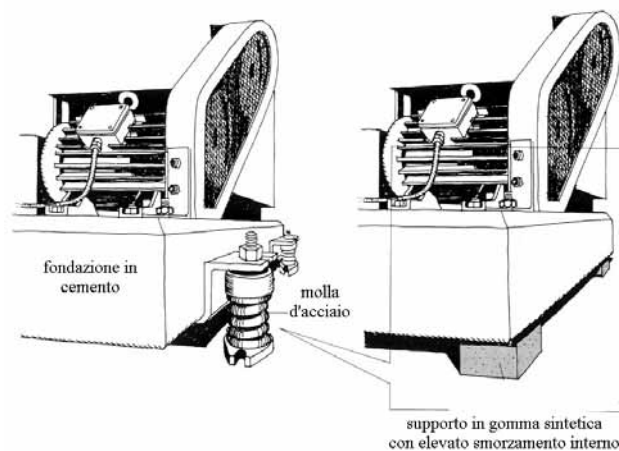
l'impiego quando il macchinario operi per tempi significativi vicino alla zona di risonanza. Si possono comunque dotare di dispositivi di attrito in parallelo. Dei dispositivi di blocco possono impedire un'eccessiva estensione verticale delle molle.



Montaggio vincolato

Qui la molla ad oscillazione libera con i suoi rivestimenti antirumore è vincolata per minimizzare ogni movimento attraverso dei fermi regolabili resilienti. Questi montaggi sono impiegati quando la massa di una base di inerzia non è disponibile per controllare variazioni occasionali del carico come colpi di vento sulle torri di raffreddamento roof top o partenze nei compressori

Il montaggio di sinistra va bene se la macchina passa un tempo trascurabile nelle vicinanze della frequenza di risonanza, altrimenti è decisamente preferibile il supporto di destra per la presenza di un elevato smorzamento.



Supporti in elastomero

Sono disponibili in un'ampia varietà di forme con il materiale che lavora in compressione o a taglio. Il materiale è neoprene sintetico, ovvero gomma butilica o naturale.

Le caratteristiche elastiche del materiale dipendono fortemente dal grado di durezza e dalla forma. Vengono impiegati con deformazioni relative fino al 15-25% con elevato smorzamento interno (fra 0,01 e 0,08 a 20°C).

Il materiale è soggetto ad invecchiamento. Le deflessioni statiche sono dell'ordine di 12 mm. E' certamente il supporto più diffuso ed economico.

Tamponi o lastre in fibra minerale

Sono disponibili in varie dimensioni e spessori da 25 a 100 mm con capacità di carico fino a 30 kp/cm².

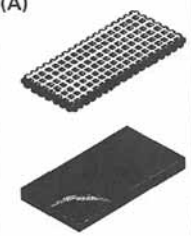

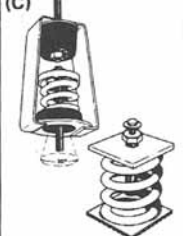
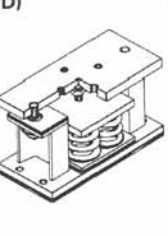
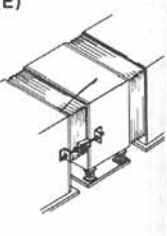
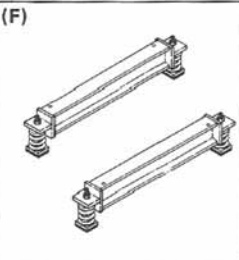
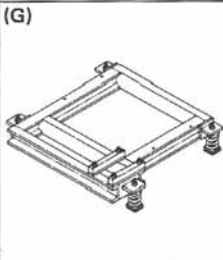
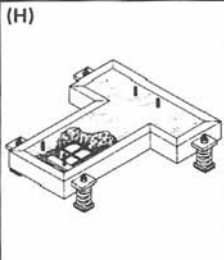
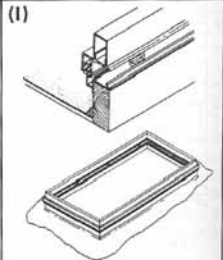
Per la non linearità delle caratteristiche elastiche la frequenza naturale non dipende molto dal carico e va da 7 a 15 Hz. L'uso prevalente è nei pavimenti galleggianti o nell'isolamento di fondazioni di edifici.

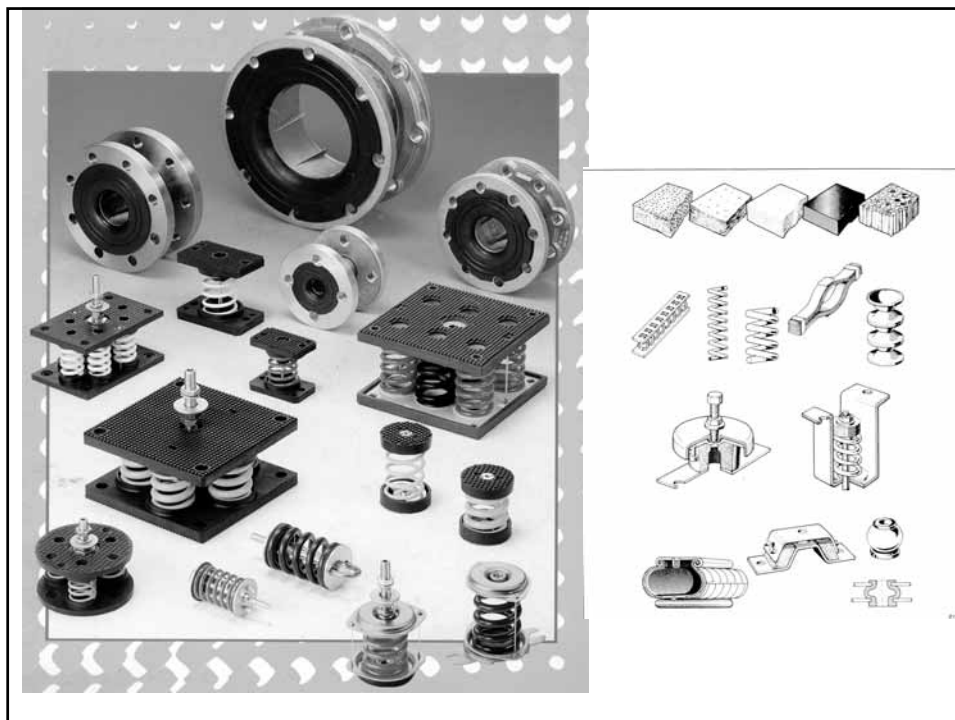
Lastre di sughero

vengono utilizzate soprattutto sotto i basamenti di fondazione di macchinari pesanti con deformazioni relative tra il 10 e il 20%.

Supporti pneumatici

L'elemento elastico è l'aria compressa racchiusa entro dispositivi stagni, spesso con un meccanismo servoazionati di autolivellamento. Sono usati se si vogliono valori molto bassi di frequenza naturale (0,5-3 Hz).

MATERASSINO IN GOMMA O FIBRA DI VETRO	GOMMA SU PENDINO	MOLLE SU SUPPORTO O PENDINO	MOLLE CON MONTAGGIO VINCOLATO	VINCOLO REGGISPINTA
(A) 	(B) 	(C) 	(D) 	(E) 
BASE STRUTTURALE A ROTAIA	BASE IN ACCIAIO PREFABBRICATA	BASE INERZIALE IN CEMENTO	ROTAIA SU MOLLE MONTATA A CORDOLO	
(F) 	(G) 	(H) 	(I) 	

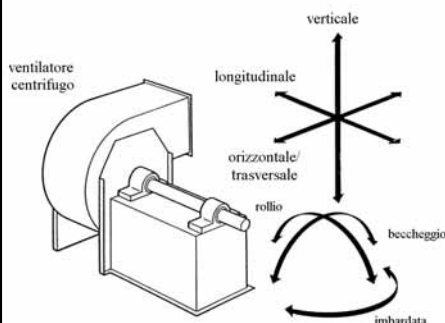


SISTEMI DI ISOLAMENTO DALLE VIBRAZIONI		
Tipo e configurazione	materiale	Caratteristiche e applicazioni
Semplice pannello	Gomma, plastica elasticizzata, sughero, feltro	Semplice e poco costosa per macchine fisse, può o non può essere vincolato sul posto
Area di montaggio	Gomma, plastica elasticizzata, sughero, sughero composito, feltro, montaggi in gomma vincolati o corrugati	Di solito nella forma di un montaggio a materassino posto sotto le basi della macchina su pavimenti in cemento
Molle elicoidali in acciaio	acciaio	Isolamento dalle vibrazioni eccellente su di un ampio intervallo di frequenze, buon comportamento nell'assorbire gli urti, poco smorzamento, valido su di un ampio intervallo di frequenze
Molle elicoidali in acciaio smorzate	Acciaio più materiale di smorzamento	Tutti i vantaggi di una molla con smorzamento regolabile o non attraverso attrito o tecniche viscoso
Montaggio in gomma in compressione	Gomma in neoprene collegata o adattata	Semplice e poco costosa può essere vincolata, possiede poco smorzamento intrinseco
Montaggio in gomma a taglio	Gomma in neoprene collegata o adattata	Semplice, abbastanza economica, capace di elevata freccia statica, non sicura in caso di guasto
Montaggio pneumatico	Molla ad aria compressa dall'esterno	Costosa, efficienza di isolamento elevata, autolivellante, frequenza naturale anche fino a 1,5 Hz
Rete metallica tessuta	Acciaio inox tessuto, arrotolato a cuscino	Sistema con buon smorzamento usato assieme a molle d'acciaio per applicazioni ad alta temperatura

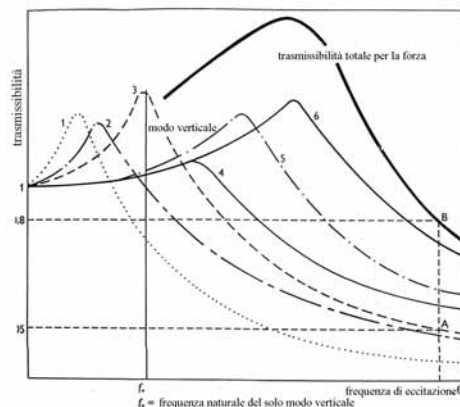
Differenti modi possibili di vibrazione

Fin qui si è considerato un solo grado di libertà. In realtà ogni corpo libero presenta 6 possibili modi di vibrazione: 3 di traslazione lungo tre assi ortogonali e 3 di rotazione. Tutti questi modi possono essere mutuamente accoppiati e ad ognuno è associata una frequenza di risonanza.

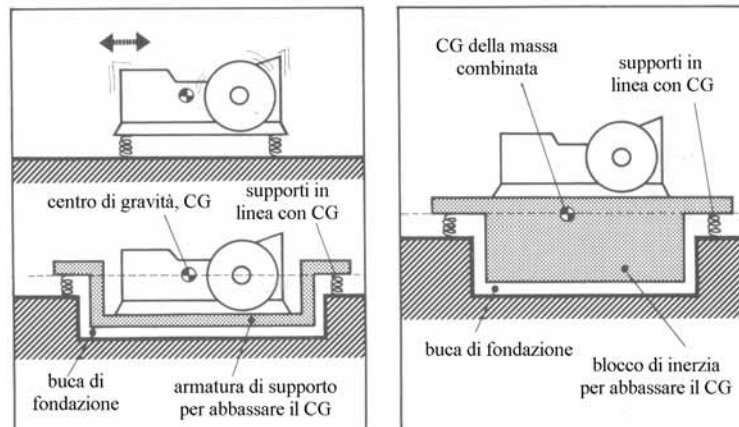
Sei modi di trasmissibilità incluso l'accoppiamento



I sei modi di vibrazione



Se il centro di gravità di una macchina che vibra è al di sopra della linea di azione delle forze orizzontali può instaurarsi un movimento oscillatorio, particolarmente temibile con le forze sbilanciate di un macchinario rotante. Un sistema di supporto o un blocco inerziale possono allineare il centro di gravità con i supporti stessi.



Non esiste una trattazione semplice per i sistemi a più gradi di libertà. Si danno talvolta dei limiti fra la rigidità orizzontale e verticale, ad esempio si dice che la rigidità orizzontale deve essere non meno della verticale $\times 1,3$. Aiutano in questo anche le basi inerziali. Infatti questa operazione abbassa il centro di gravità del sistema isolato possibilmente sul piano dei supporti isolanti. Si adattano inoltre dispositivi di blocco per direzioni diverse dalla principale e per le quali si presume sia di minore importanza la vibrazione.

Elasticità non corrispondenti al modello ideale

Entro i limiti di deflessione statica comunemente riscontrati (10-40% della dimensione senza carico) le molle metalliche presentano un andamento deflessione-carico di tipo lineare (k costante). Questo non è vero per tutti i materiali utilizzati che possono diventare più rigidi all'aumentare del carico o della velocità. La frequenza naturale può essere in realtà circa doppia di quelle prima valutate.

Si avrebbe cioè:

$$f'_n = f_n \sqrt{r} \text{ dove } r = \frac{k_d}{k}$$

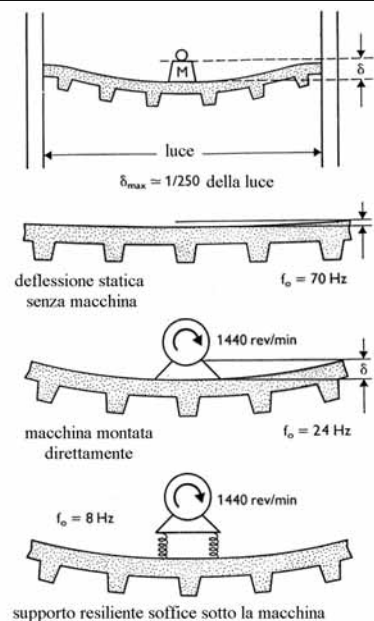
Dove k_d è la costante dinamica o sotto carico. Per gomma sintetica r può valere 1,3-2,4 per cui f_n è oltre del 50% più grande.

Attenzione che non è vero che all'aumentare della velocità si ha sempre meno forza trasmessa al supporto. Infatti le forze sbilanciate spesso aumentano con il quadrato della velocità. Questo di solito bilancia la riduzione in trasmissività e si va verso un valore costante da una certa velocità in poi.

Elasticità della struttura di appoggio

Fin qui si è ipotizzato che i supporti elastici poggino su di una struttura perfettamente rigida. Questo non è vero quando i macchinari sono posti in opera su solai di interpiano o di copertura di un edificio, specie se di ampia luce.

Una struttura di solaio presenta modi complessi di vibrazione propria che possono dar luogo a risonanze, sì che da modeste sollecitazioni si può arrivare a vibrazioni di rilevante ampiezza.



Relazione fra la vibrazione di un macchinario e la risposta alla vibrazione del solaio

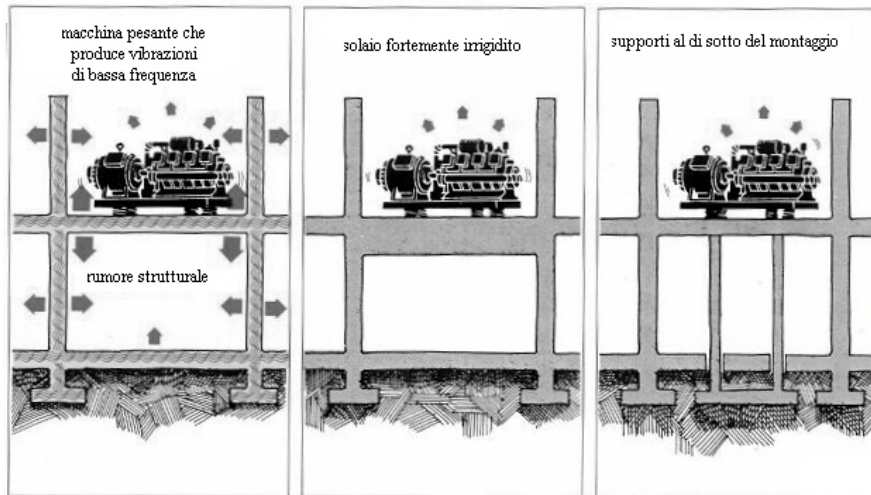
Per stabilire la frequenza naturale di risposta di un elemento strutturale, bisogna conoscere la deflessione sotto carico. Generalmente per un solaio la massima deflessione al centro della campata è inferiore a 1/250 della campata stessa e con il consueto margine di sicurezza, ponendo che il carico sia stato supposto 5 volte maggiore di quello effettivo si può costruire la tabella:

Consentita e massima freccia di campate di solaio caricate al centro

Luce (m)	Freccia consentita δ (1/250) (mm)	Freccia massima probabile (20%) (mm)	Frequenza naturale Minima (Hz)
3	12	2	12
5	20	4	8
10	40	8	7
12	50	10	6
15	60	12	5

Per evitare il problema della risonanza il supporto deve presentare minore rigidità del solaio di almeno 5-6 volte. Si consideri una macchina a 24 Hz leggermente sbilanciata su di un solaio di frequenza naturale senza il carico della macchina di 70 Hz (freccia 0,05 mm). Se la freccia sotto carico è di 0,5 mm, la nuova frequenza naturale è di 21 Hz, quasi di risonanza con la macchina. Questo pericolo si può prevenire mediante un supporto elastico che dia luogo ad una deflessione almeno 5 volte maggiore, cioè 2,5 mm con frequenza naturale pari a 10 Hz e frequenza totale naturale pari a circa 9 Hz. In generale si è trovato che la risonanza dei componenti degli edifici è compresa fra 5 e 200 Hz con i solai attorno a 70 Hz. Poiché molte apparecchiature negli edifici operano fra 3 e 24 Hz ci si spiega la presenza frequente di problemi di vibrazione. I pavimenti galleggianti non risolvono i problemi relativi alla trasmissione di vibrazione. Anzi, dal momento che la frequenza naturale di vibrazione del materassino isolante è sui 15 Hz, è necessario un intervento deciso sui supporti isolanti con frequenze naturali inferiori a 5 Hz e quindi con deflessioni statiche di oltre 25 mm.

Potendo intervenire sulla struttura dell'edificio si può rinforzare il solaio, se non addirittura supportarlo con dei pilastri che vanno direttamente sulle fondazioni:



La supportazione elastica espone i macchinari a gravi sollecitazioni in caso di evento sismico, per cui nelle zone a rischio è necessario prevedere blocchi antisismici.

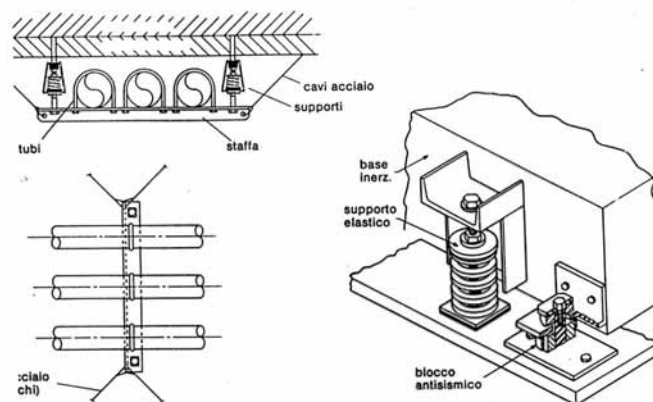
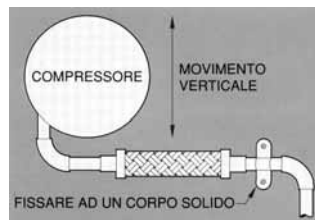
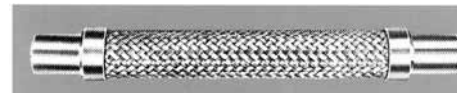
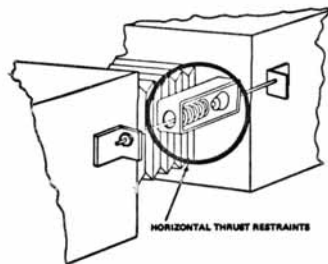
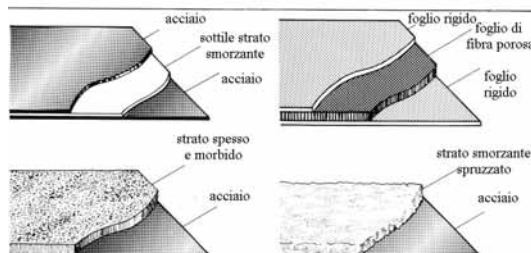


Fig. II.2-6 - Esempi di bloccaggio antisismico (da /6/).

Ogni collegamento fra i macchinari vibranti e la struttura dell'edificio va evitato. Questo coinvolge tubazioni, canalizzazioni e connessioni elettriche che vanno collegati alla macchina con connessioni elastiche o supportate elasticamente.



Se un pannello è posto in vibrazione, il livello di vibrazione diminuisce con il tempo, ma la velocità della diminuzione dipende dallo smorzamento interno del materiale. Lo smorzamento influisce anche sul livello massimo che viene generato da una data sollecitazione. Molti materiali di uso comune presentano uno smorzamento modesto ed uno strato smorzante può essere posto per ridurre le vibrazioni.



Materiale di smorzamento va applicato ad una struttura che:

- 1) è forzata a vibrare ad una frequenza naturale;
- 2) è posta in vibrazione da forze casuali o con varie componenti di frequenza;
- 3) è posta in vibrazione da impatti o da forze variabili;
- 4) trasmette vibrazioni a superfici che irradiano rumore;
- 5) irradia rumore a banda larga.

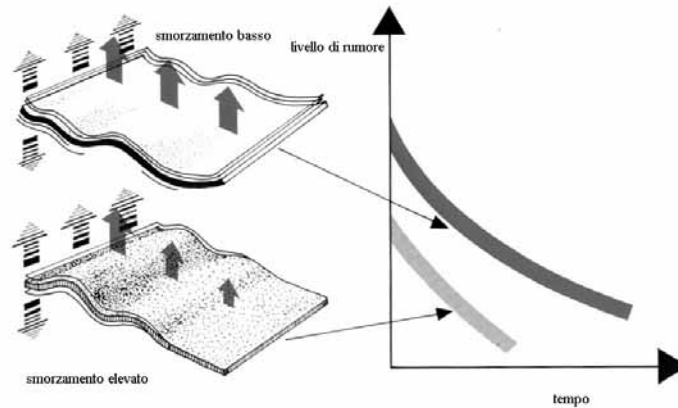
L'applicazione di materiale smorzante può essere molto efficace in prossimità della frequenza di risonanza. Tuttavia è di poca efficacia su vibrazioni che agiscono a frequenze diverse.

Si utilizzano spesso materiali viscoelastici che sono in grado di immagazzinare molta energia se deformati e di dissiparla perché presentano scorrimento come un fluido di grandissima viscosità. Tipicamente si comportano così gomme e plastiche.

Lo smorzamento di un pannello strutturale può essere realizzato con l'adesione di uno strato di materiale viscoelastico che va posto dove subisca una deformazione importante sotto vibrazione (al centro piuttosto che non ai bordi di un pannello) e che sia in grado di dissipare una rilevante frazione dell'energia assorbita. Non deve essere quindi né troppo morbido (partecipa alla vibrazione ma immagazzina poca energia) né troppo rigido (limita il moto del pannello, dissipando però poca energia).

Lo strato può essere impiegato libero o con un rivestimento addizionale. Nel primo caso lo smorzamento è dovuto soprattutto agli sforzi sullo strato che derivano dalla piegatura del pannello. Questi aumentano più che proporzionalmente allo spessore dello strato con una variazione molto forte per spessori sottili e per materiale tenero. Se invece il materiale viscoelastico è saldato al pannello vibrante ma è contenuto in uno strato di materiale strutturale, l'effetto di smorzamento è dovuto principalmente alle deformazioni di taglio in questa specie di sandwich a 3 componenti.

Quest'ultima tecnica è più vantaggiosa della precedente purché si utilizzi un corretto spessore, dato che l'effetto inizialmente cresce al crescere dello spessore e poi diminuisce per spessori crescenti. Il materiale libero richiede uno spessore da 2 a 4 volte quello del pannello da smorzare con un'ottima adesione al pannello stesso e se del caso al contenitore esterno.



Piastre vibranti di grande dimensione producono risonanze di bassa frequenza assai difficili da smorzare. Se la piastra viene irrigidita la risonanza si sposta a frequenze più alte più agevoli da smorzare. In tal caso può risultare più semplice ed economico applicare tanti piccoli strati smorzanti fra gli elementi di irrigidimento piuttosto che non un singolo ampio strato.

